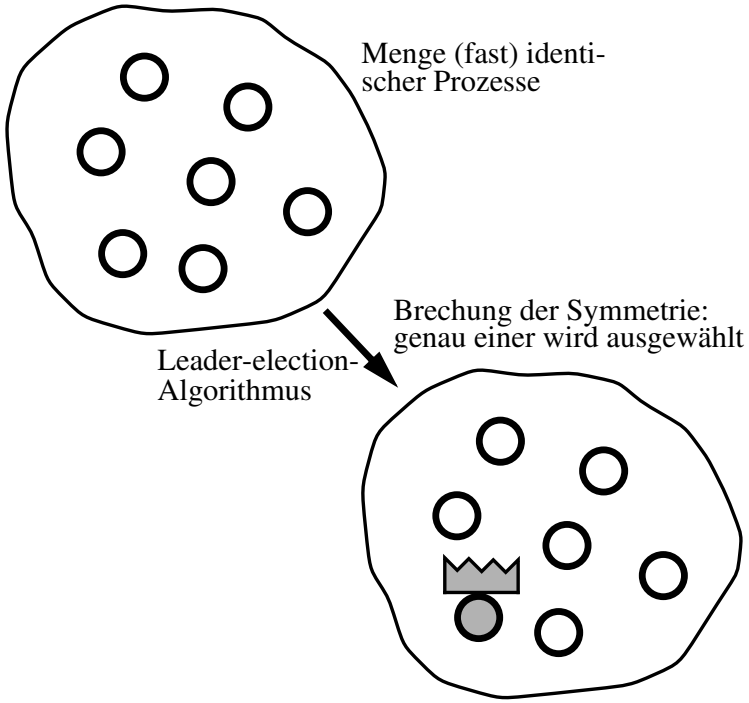
# Das Election-Problem



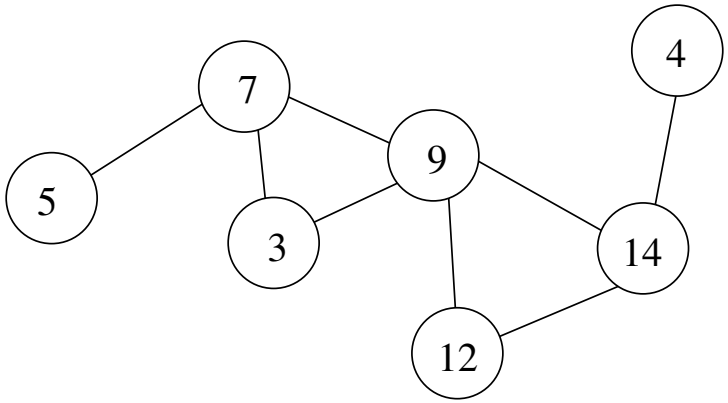

*Anwendung* z.B.:

- Monitorstation bei Token-Ring-LANs festlegen
- Generierung eines eindeutigen Tokens
- "Root bridge" für Spannbaum bei Ethernet-LANs
- "Symmetrisierung" anderer Algorithmen
  (Verwendung als vorgeschalteter Basisalgorithmus)



# Election mit "message extinction"

- Alle Knoten haben unterschiedliche Nummern > 0
- Verteilter, symmetrischer Algorithmus zur Bestimmung der grössten Identität
- Jeder Knoten soll schliesslich grössten kennen
- Jeder Knoten darf unabhängig (gleichzeitig) den Algorithmus initiieren
- Schema der verteilten Approximation anwenden




*Fragen*:

- Anzahl der Nachrichten?
- Terminierung?
- Bessere Algorithmen für gleiches Problem?
- Spezielle Topologien (Ring, Baum)...?

# Der Election-Algorithmus

- Nachrichtengesteuerte Spezifikation des Algorithmus ("*message driven*")
- *Atomare Aktionen* ← vereinfacht u.a. auch die Verifikation
- Jeder Prozess mit Identität $p$ hat lokale Variable $M_p$
- $M_p$ ist initial 0; am Ende enthält $M_p$ die Identität des Masters ("leader")

Alle Prozesse verhalten sich gleich ("syntaktische Symmetrie")

Name der Aktion

assertion

$I_p$: $\{M_p = 0\}$
$M_p := p;$
**send** $\langle M_p \rangle$ **to** all neighbours

$R_p$: {Eine Nachricht $\langle j \rangle$ ist eingetroffen}
**if** $M_p < j$ **then**
$M_p := j;$
**send** $\langle M_p \rangle$ **to** all neighbours
**fi**

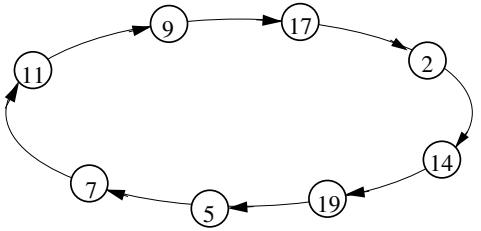
?

$T_p$: {Terminierung wurde entdeckt}
**if** $M_p = p$ **then** *"I am the master"* **fi**

andernfalls ist p der master



# Leader-Election auf einem Ring




- Voraussetzung hier: unidirektionaler Ring, wobei alle Identitäten verschieden sind

*1. Idee*:
- Jeder Prozess wacht irgendwann auf (spätestens, wenn er eine Nachricht von einem anderen erhält)
- Startet vollständigen Ringumlauf
- Meldet, ob unterwegs einen grösseren getroffen

"Bully-Algorithmus"

==> $n^2$ Einzelnachrichten (n = Anzahl der Prozesse)

---

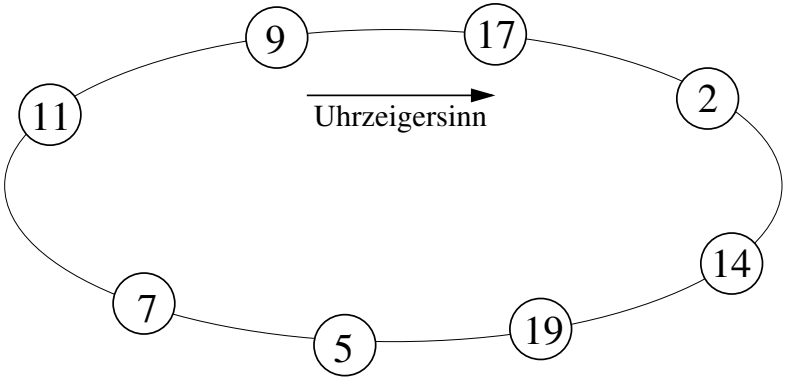
*2. Idee*: Message-extinction anwenden!

$I_p$: $\{M_p = 0\}$
$M_p := p;$
**send** $\langle M_p \rangle$ **to** next

$R_p$: {Eine Nachricht $\langle j \rangle$ ist eingetroffen}
**if** $M_p < j$ **then**
$M_p := j;$
**send** $\langle M_p \rangle$ **to** next
**fi**
**if** $j = p$ **then** *"I am the master"* **fi**

# Election: Nachrichtenkomplexität

- Message-extinction-Prinzip von Chang und Roberts 1979
  - war einer der ersten verteilten Algorithmen




- *Worst-case Nachrichtenkomplexität* bei k Startern:
  n + (n-1) + (n-2) +...+ (n-k+1) = **nk - k(k-1)/2**

  --> $O(n^2)$ bei Ringgrösse n und k=n

- Wie hoch ist die *mittlere* Nachrichtenkomplexität?
  - bei “zufälliger” Permutation der Identitäten

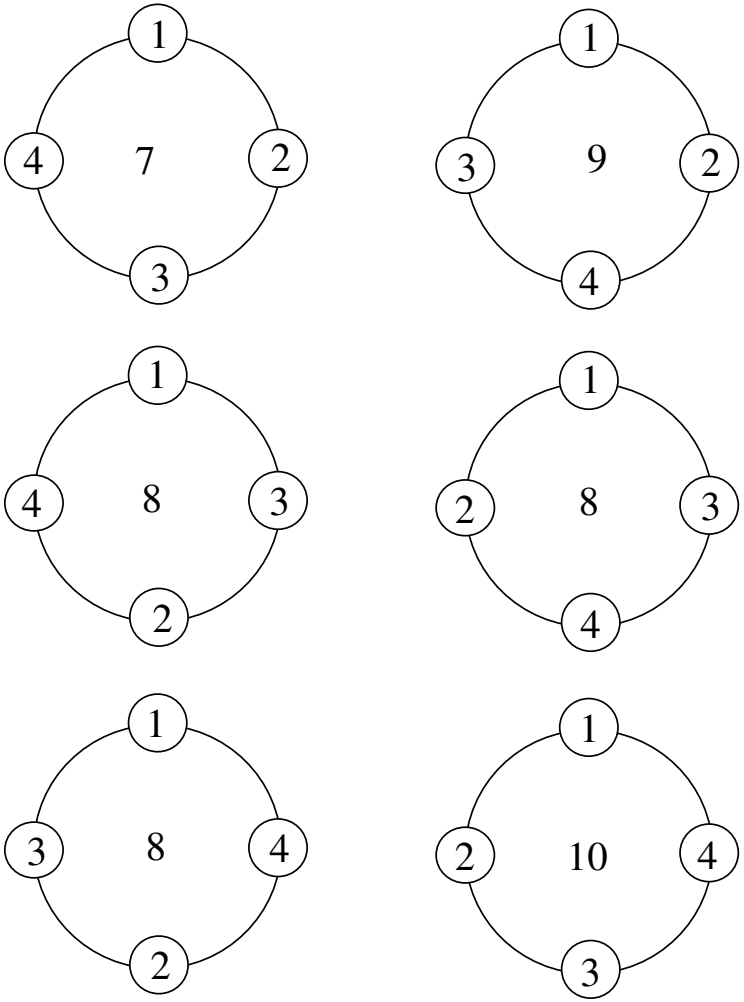
- Wie hoch ist die *Zeitkomplexität*?
  - wenn alle gleichzeitig starten?
  - beim zeitversetzten Starten?

Jede Nachricht benötige eine Zeiteinheit ("Einheitszeitmodell")



# Mittlere Nachrichtenkomplexität (1)

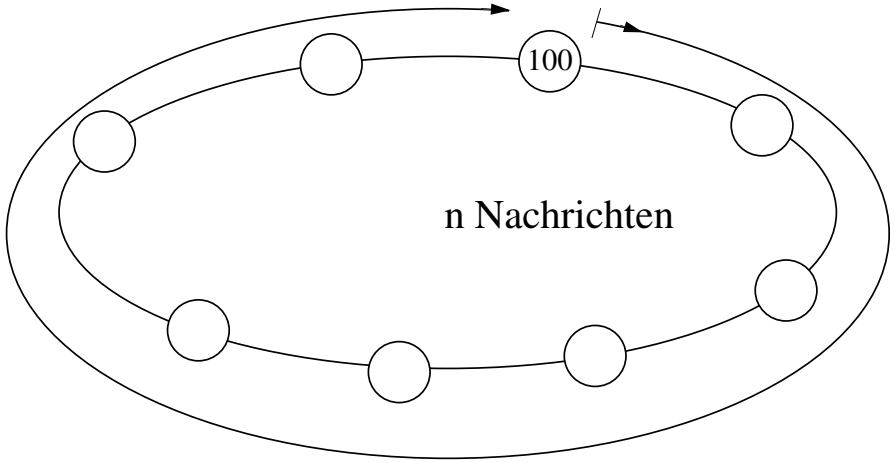
- Beispiel: Sei k = n = 4
- Über alle Permutationen mitteln (wieviele?)

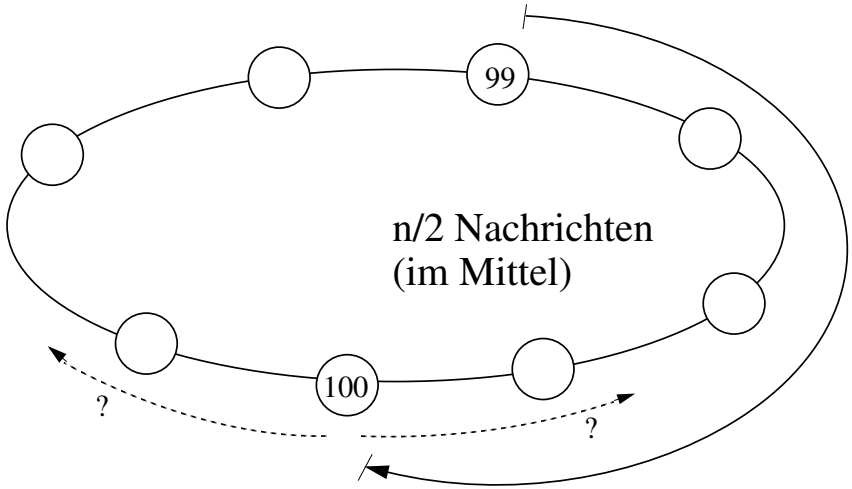



50/6 = 8.333... Nachrichten im Mittel

# Mittlere Nachrichtenkomplexität (2)

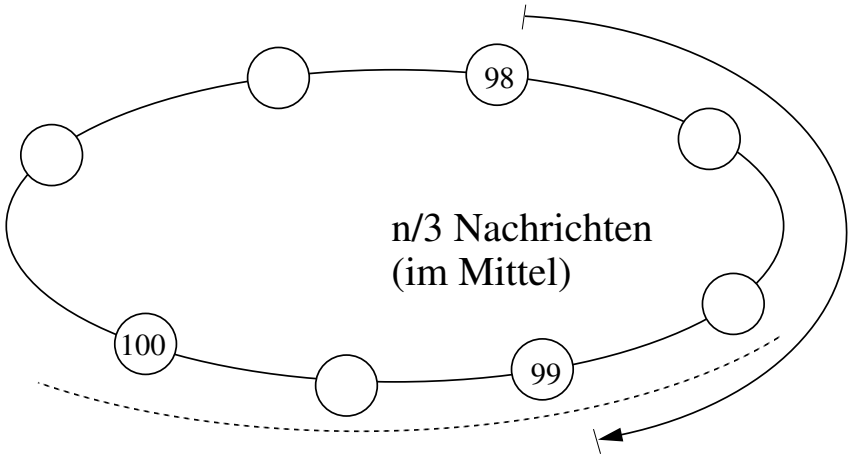
Sei n = 100; id = 1, 2, ..., 100






# Mittlere Nachrichtenkomplexität (3)




*Vermutung*: Drittgrösster sollte im Mittel nach n/3 Schritten auf einen grösseren Prozess (99 oder 100) treffen

- Lässt sich durch explizites Nachrechnen aller ca. $n^2$ Fälle auch beweisen...

- Allgemeiner Beweis für die Vermutung "n/i Schritte beim i-t grössten"?

# Mittlere Nachrichtenkomplexität (4)

- Grösste Identität: n Nachrichten (immer)
- Zweitgrösste: im Mittel n/2
- Drittgrösste: im Mittel n/3 ??
  ...
- i-t grösster: im Mittel n/i ← stimmt das?

*Wenn* das stimmt -->

einfach aufaddieren?

$$\frac{n}{1} + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + ... + \frac{n}{k} = n \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} = n\, H_k$$

Def. der sogenannten *harmonischen Reihe*

Was ergibt sich für n = k = 4 ?

$$4 \frac{12+6+4+3}{12} = 25/3 = 8.333...$$

Stimmt mit früherem Wert überein!
==> *Vermutung*: $n\, H_k$ ist korrekt

- Man kann tatsächlich exakt zeigen:

  Die mittlere Nachrichtenkomplexität beträgt

$$n \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} = n\, H_k \approx \mathbf{n \ln k}$$

Wir wollen dies gleich genauer herleiten...



# Unabhängige Fälle?

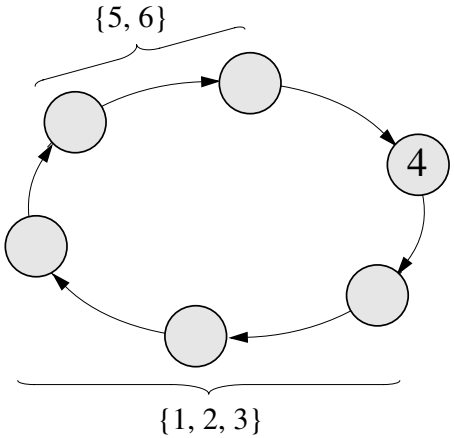
Im allgemeinen sind die "Zufallsvariablen", die die Länge der von Prozess i initiierten Nachrichtenkette repräsentieren, nicht unabhängig voneinander!

*Beispiel*: Gegeben 6 Prozesse 1, 2, ... 6 im Ring.
Sei *A* das Zufallsereignis "Nachrichtenkette von Prozess 4 hat die Länge 4" und *B* das Zufallsereignis "Nachrichtenkette von Prozess 5 hat die Länge 2"

Aus *A* folgt nebenstehende Situation; dann kann die von 5 initiierte Nachrichtenkette jedoch nur die Länge 1 oder 5 haben, nicht jedoch 2, wie von *B* gefordert

==> $prob(A \cap B) = 0$, obwohl $prob(A) \times prob(B) \neq 0$

==> A und B sind *nicht unabhängig* voneinander!




Allerdings (hier ohne Rechtfertigung):

- die Zufallsvariablen in obigem Beispiel sind *paarweise unkorreliert*
- *Erwartungswerte* (d.h. die mittleren Längen der Nachrichtenketten) dürfen daher *aufaddiert* werden, um den Mittelwert bzgl. der Gesamtnachrichtenzahl zu erhalten (in "Formeln": E(X+Y) = E(X) + E(Y))

# Die harmonische Reihe $H_n$ ...

*Beh.*: $H_n$ divergiert

*Bew.*: Fasse 4 Reihenglieder ab 1/4 zusammen,
(jew. grösser als 1/8), 8 Reihenglieder ab 1/8...

---

*Beh.* (o. Bew.) $\sum_i \frac{1}{i^r}$ konvergiert gdw. $r > 1$

($r = 2$ --> $\pi^2/6$ ... Riemann'sche Zeta-Funktion)

==> Harmonische Reihe "divergiert gerade noch"

---

*Beh.* (o.Bew.) $\gamma = \lim_{n \to \infty} (H_n - \ln n) = 0.5772156649...$

Euler'sche Konstante

==> $H_n$ lässt sich zumindest für grosse n durch ln n abschätzen

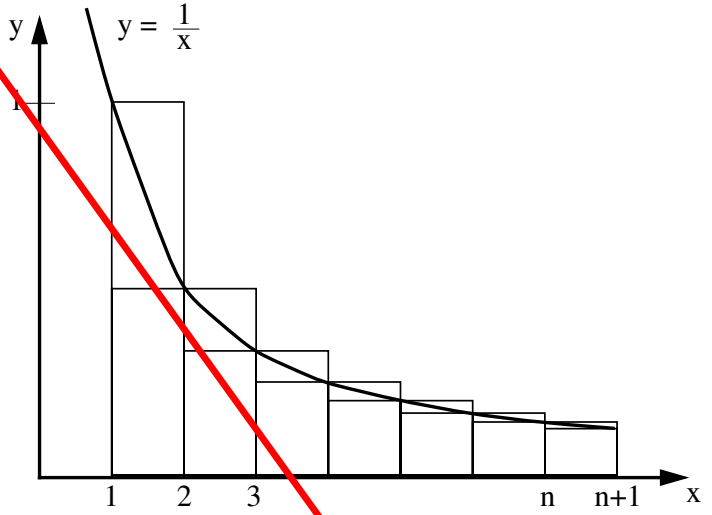
- diese Abschätzung lässt sich sogar noch präzisieren...



# Abschätzung der harmonischen Reihe $H_n$

*Beh.*: $\ln n < H_n < 1 + \ln n$

*Bew.*:




- *Fläche der Obertreppe* von 1 bis n+1: $H_n$

- *Fläche unter Kurve* von 1 bis n+1: $\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(n+1)$ (wg. $\ln(1) = 0$)

==> $H_n > \ln(n+1)$ ==> $H_n > \ln n$

---

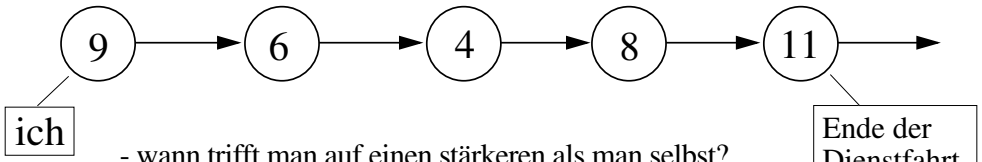
- *Fläche der Untertreppe* von 1 bis n: $H_n - 1$

- *Fläche unter Kurve* von 1 bis n: $\int_1^{n} \frac{1}{x}\,dx = \ln(n)$

==> $H_n - 1 < \ln(n)$ ==> $H_n < 1 + \ln n$

# Wartezeit bis zum ersten Rekord

- Wie weit kommt die von einem "x-beliebigen" Knoten initiierte Nachrichtenkette im Mittel?




- wann trifft man auf einen stärkeren als man selbst?
- wie lange überlebt man im Mittel?

In einem Teich schwimmen n Fische verschiedener Grösse - wieviele Fische muss man im Mittel noch fangen, bis man einen fängt, der grösser als der erste gefangene Fisch ist? (Oder bis der Teich leer ist)

*Lösungsansatz* (aber darf man wirklich so vorgehen?):

Fängt man den grössten zuerst --> n Fänge ("Pech", Teich wird leer)
Fängt man den zweitgrössten zuerst --> n/2 Fänge im Mittel
Fängt man den drittgrössten zuerst --> ...

---

Zurückführung auf ein bek. math. Modell: *Urnenmodell ohne Zurücklegen*

Z.B. n=100, 7.grösster Fisch initial:
--> 6 schwarze und 93 weisse Kugeln
--> Sei p die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen ("Treffer")
--> Beispiel: Wahrscheinlichkeit, eine weisse und dann eine schwarze zu ziehen (d.h. genau die Entfernung 2 zu schaffen): (1-p) mal Wahrscheinlichkeit für "Treffer bei 6 schwarzen und 92 weissen"
--> ... alles gewichtet aufsummieren... (aufwendig!)

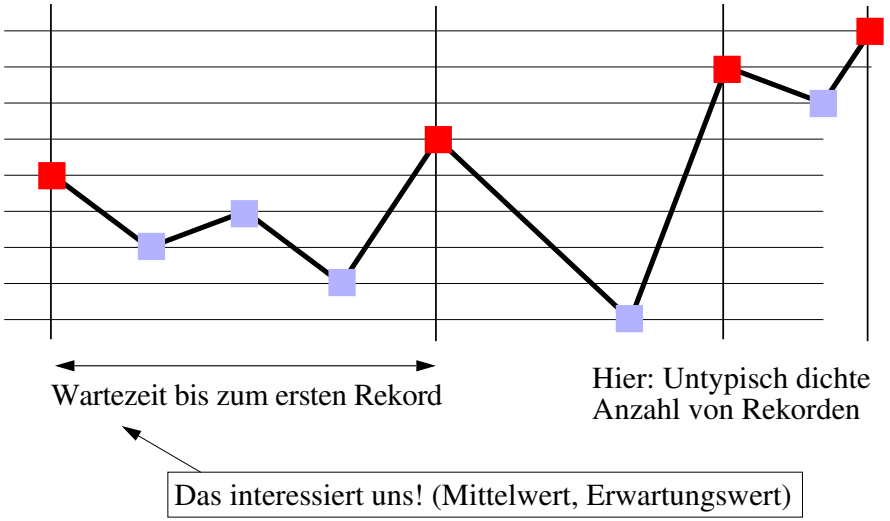


# Warten auf einen neuen Rekord...

- Rekord = grösserer Wert als alle vorangehenden
- "left to right maxima" (einer Zahlenfolge)

---

- Z.B. "heissester August seit Anfang des Jahrhunderts"




- Anwendung: z.B. Verlobungshäufigkeit bei deletion-sort

Festhalten und weitersuchen

# Rekorde ...werden immer seltener

- Wieviele Rekorde gibt es eigentlich?
  - z.B. heissester August in einem Jahrhundert...
  - Annahme: keine Korrelation (d.h. zufällige Permutation vorausgesetzt)

---

- Betrachte Bitfolge: i-te Stelle 1 gdw. i-ter Wert ein Rekord

  Bsp: 10010110000001000000000010000000000000001
  (Rekorde traten im 1., 4., 6., 7., 14.,... Jahr auf)

- Wieviele 1en bei gegebener Länge n?

  Antwort: - damit i-tes Bit auf 1 steht, muss der i-te Zahlenwert der Folge ≥ alle ersten i Zahlenwerte sein
  - Wahrscheinlichkeit dafür ist 1 / i (stimmt's? wieso?)

--> Mittlere Anzahl von 1en = 1 + 1/2 + 1/3 +...
  - darf man wirklich einfach so aufaddieren?

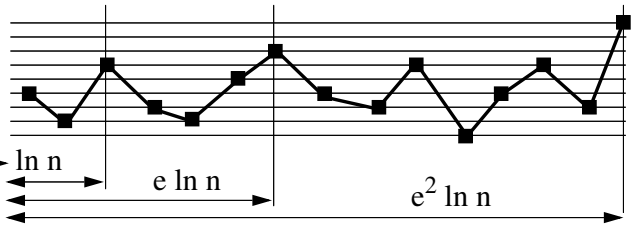
--> Mittlere Anzahl von Rekorden ist $H_n \approx \ln n$

  - Bsp: es gibt ca. 5 heisseste Auguste im Jahrhundert
    ... und wieviele in einem Jahrtausend?

---

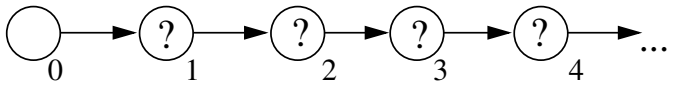
==> Für einen Rekord mehr (im Mittel) muss das Zeitintervall ca. e = 2.71828 mal länger sein

Das haben wir noch immer nicht wirklich bewiesen!






# Verteilung der Lebensdauer




Zu jedem Zeitpunkt ein Schritt...

- Wahrscheinlichkeit, *genau* bis zur Position i zu gelangen (und dort besiegt zu werden)?

- p(Lebenszeit = i) = p(Lebenszeit ≥ i) - p(Lebenszeit > i)
  - Vgl.: 18% Studis ≥ 16. Semester; 13% Studis ≥ 17. Semester (= > 16. Semester)
    ==> 5% *im* 16. Semester

Wahrscheinlichkeit für "grösster unter den ersten i"

- Also: $p(\text{Lebenszeit} = i) = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = \frac{1}{i(i+1)}$ (für i<n)

- Aber: $p(\text{Lebenszeit} = n) = \frac{1}{n}$ ("erfolgreicher Durchmarsch")

---

*Beispiel n=4:*

gewichtete Summe = 25/12 --> 25/3 = 8.333...
Nachrichten im Mittel (vgl. früheres Ergebnis!)

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{1\times2} = \frac{1}{2}$ | = 50% |
| 2 | $\frac{1}{2\times3} = \frac{1}{6}$ | = 16.7% |
| 3 | $\frac{1}{3\times4} = \frac{1}{12}$ | = 8.3% |
| 4 | $\frac{1}{4}$ | = 25% |

100%

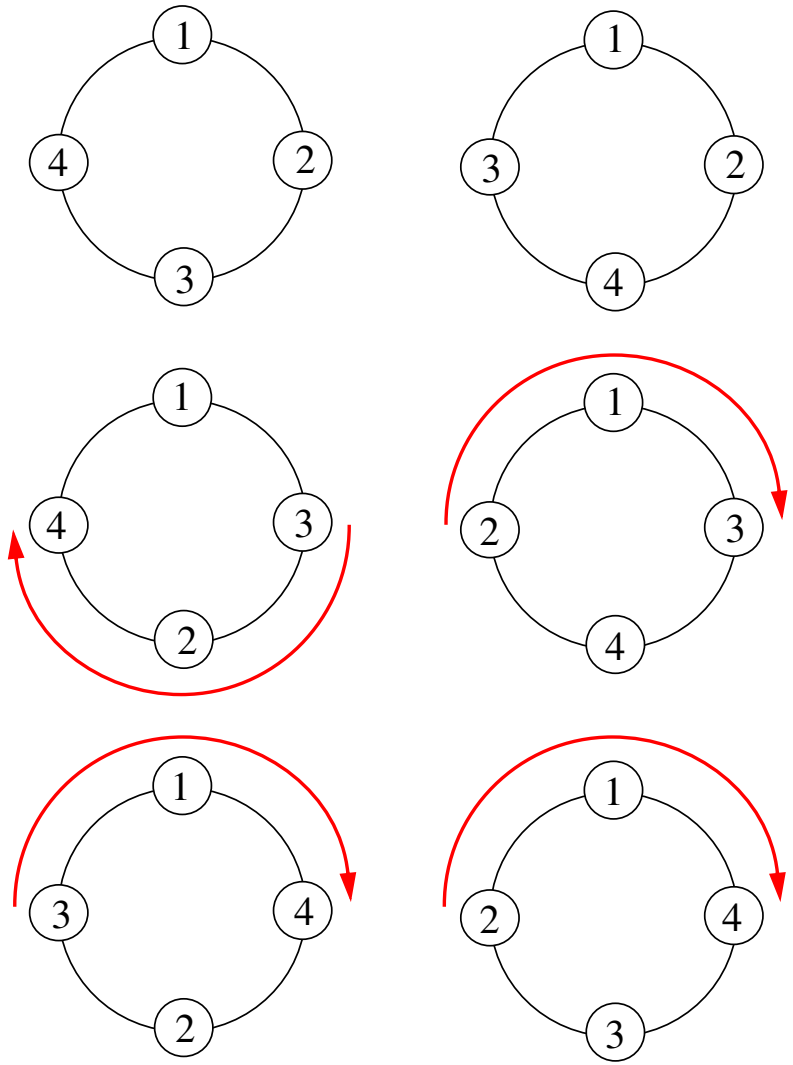
vgl. dazu nächstes Bild

Bem.: Es gilt

$$\frac{1}{n} + \sum_{i<n} \frac{1}{i(i+1)} = 1$$

(Induktionsbeweis als einfache Übung)

# Lebensdauer 2 bei n=4




6 Bilder — jeweils 4 Starter

In 4 von $6 \times 4 = 24$ Situationen, also 1/6 aller Fälle (= 16.7%),
wird für einen Initiator die Lebensdauer 2 exakt erreicht



# Induktionsbeweis der Summenformel

*Behauptung*: $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n}$

Beweis durch vollständige Induktion:

---

*Induktionsanfang*: $n = 1 \dashrightarrow 0 = 0$ ✓

$n = 2 \dashrightarrow \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}$ ✓

---

*Induktionsschritt*:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} \overbrace{= 1 - \frac{1}{n}}^{\text{ind. annahme}} + \frac{1}{n(n+1)}$$

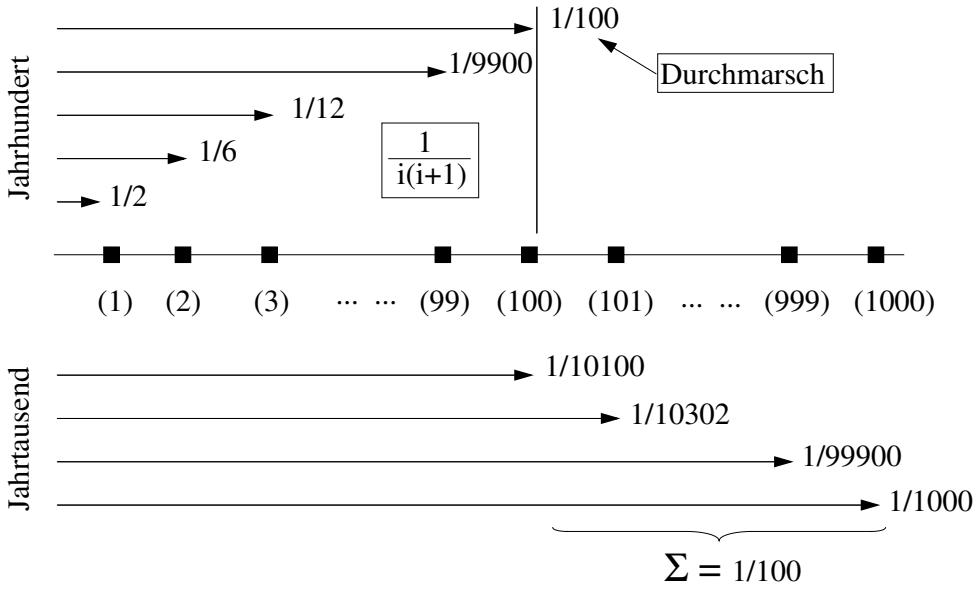
$$= 1 + \frac{-(n+1) + 1}{n(n+1)}$$

$$= 1 + \frac{-n}{n(n+1)}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$ ✓

# Rekord im Jahr i eines Jahrhunderts?

- Oder: Wahrscheinlichkeit, bei Position (i) "unterzugehen":




- "Durchmarsch" ist wahrscheinlicher, als an der Position davor "unterzugehen"

- Nur 50% Chance, über den ersten hinwegzukommen

- p(*kein* echter Rekord in einem Jahrhundert) = 1/100,
- p(... in einem Jahrtausend) = 1/1000

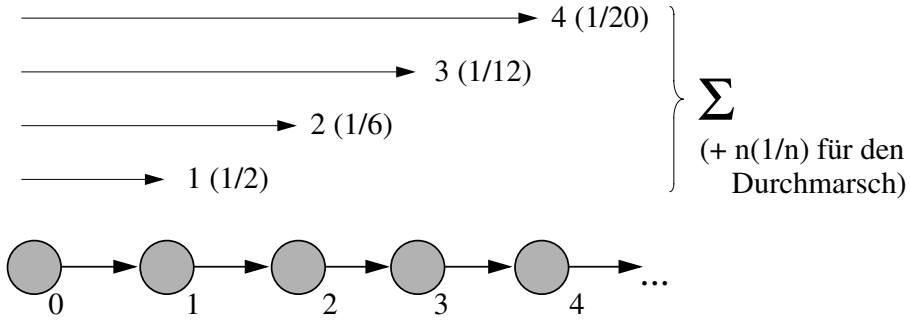
Rekord würde jenseits liegen: Geht bei Jahrhundert "nur" mit einem Gewicht von 100 ein, statt mehrere hundert bei Jahrtausend



# Nun also: Wartezeit bis zum ersten Rekord

- Gesucht: Die *mittlere* Lebensdauer

- Dazu: Wahrscheinlichkeit mit Weglänge gewichten und alle Einzelfälle aufsummieren




---

- Daraus folgt allgemein für den Erwartungswert:

$$n\,\frac{1}{n} + 1\,\frac{1}{1\times 2} + 2\,\frac{1}{2\times 3} + 3\,\frac{1}{3\times 4} + \ldots + (n-1)\,\frac{1}{(n-1)n} = \underline{\underline{H_n}}$$

---

*Also*: Eine von einem "x-beliebigen" Prozess initiierte Nachricht kommt im Mittel $H_n$ weit

- darf man das nun mit n multiplizieren, da dies jeder Prozess tut?
- ja; aber generell Vorsicht bei solchen Überlegungen!

Damit haben wir also $nH_n$ als mittl. Nachrichtenkomplexität!