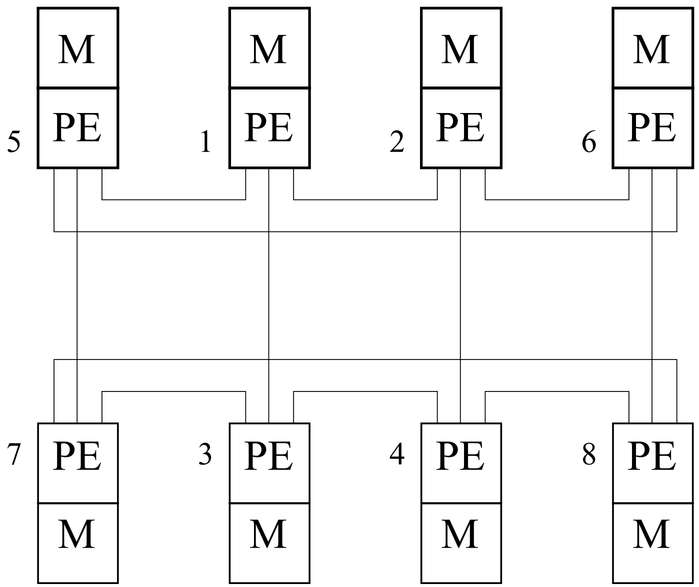
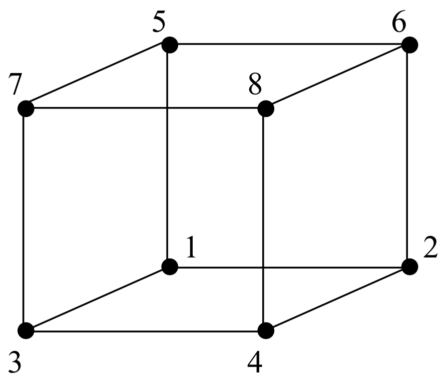
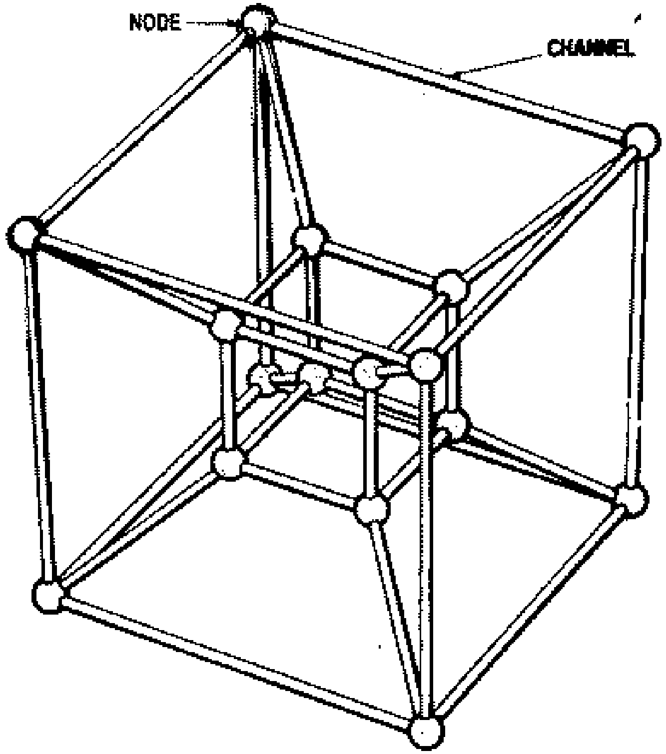
Layout eines Hypercube



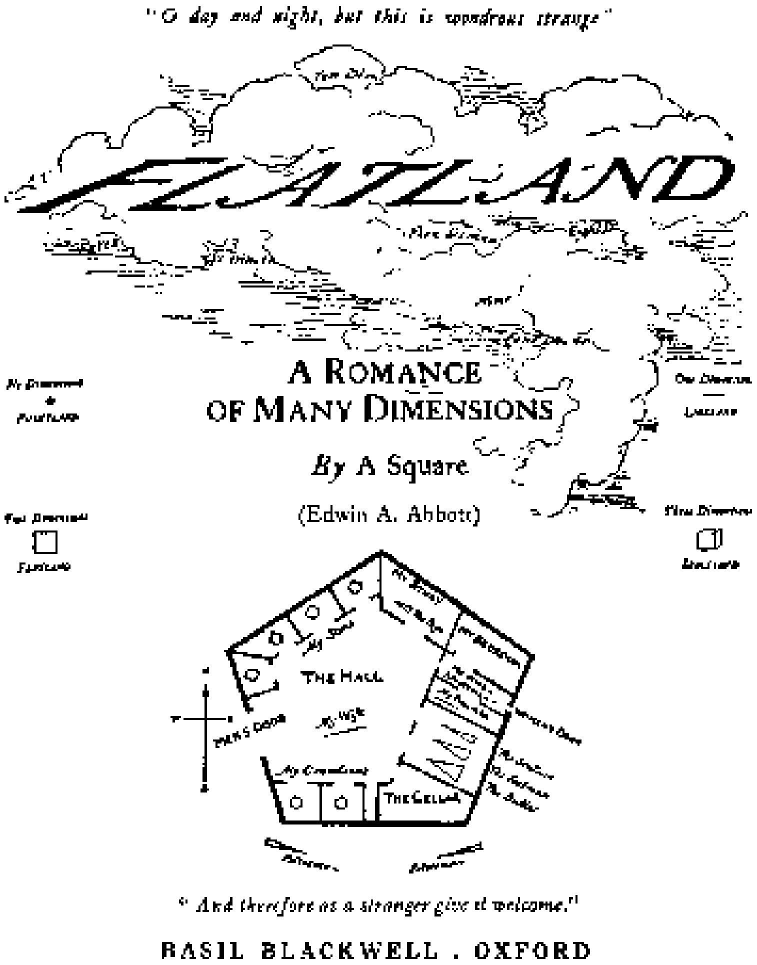
Obiger Topologie sieht man zunächst nicht an, dass es sich dabei um einen 3-dimensionalen Würfel handelt!



4-dimensionaler Hypercube



Flatland (1884)



- Diskussion über Hypercubes und höhere geometrische Dimensionen zwischen “A. Square” und “Sphere”

- Gleichzeitig soziale Satire

§ 16 .---*How the Stranger vainly endeavoured to reveal to me in words the mysteries of Spaceland*

...

Sphere. ... We began with a single Point, which of course -- being itself a Point -- has only ONE terminal Point. One Point produces a Line with TWO terminal Points.

One Line produces a Square with FOUR terminal Points.

Now you can give yourself the answer to your own question: 1, 2, 4, are evidently in Geometrical Progression. What is the next number?

I. Eight.

Sphere. Exactly. The one Square produces a SOMETHING-WHICH-YOU-DO-NOT-AS-YET-KNOW-A-NAME-FOR-BUT-WHICH-WE-CALL-A-CUBE with EIGHT terminal Points. Now are you convinced?

...

Sphere. How can you ask? And you a mathematician! The side of anything is always, if I may so say, one Dimension behind the thing. Consequently, as there is no Dimension behind a Point, a Point has 0 sides; a Line, if I may so say, has 2 sides (for the points of a Line may be called by courtesy, its sides); a Square has 4 sides; 0, 2, 4; what Progression do you call that?

I. Arithmetical.

Sphere. And what is the next number?

I. Six.

Sphere. Exactly. Then you see you have answered your own question. The Cube which you will generate will be bounded by six sides,that is to say, six of your insides. You see it all now, eh?

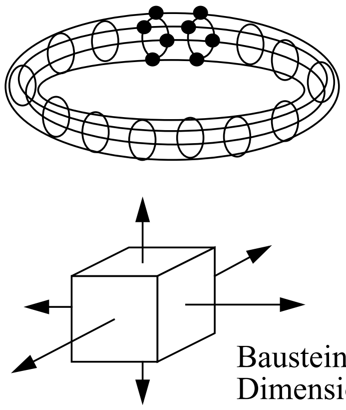
“Monster,” I shrieked, “be thou juggler, enchanter, dream, or devil, no more will I endure thy mockeries. Either thou or I must perish.” And saying these words I precipitated myself upon him.

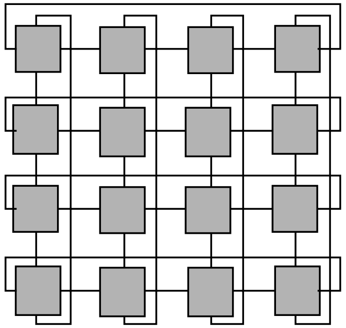
Online-Text erhältlich bei: http://www.geom.umn.edu/~banchoff/Flatland/ oder http://www.alcyone.com/max/lit/flatland/

Das *Buch* ist erhältlich in mehreren Ausgaben; z.B.: Abbott, Edwin A.: Flatland. Penguin, 1987, ISBN: 0140076158, DM 11,90

Eine andere Verbindungstopologie: der d-dimensionale Torus

= d-dimensionales “wrap-around Gitter”





- Rekursives Konstruktionsprinzip: „Nimm w_d gleiche Exemplare eines Torus der Dimension d -1 und verbinde korrespondierende Elemente zu einem Ring“

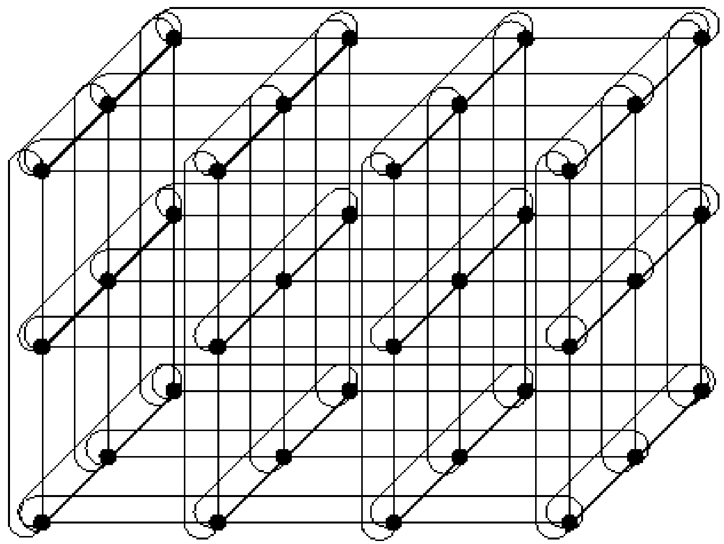
- Bei Ausdehnung w_i in Dimension i:
  $n = w_1 \times w_2 \times .. \times w_d$ Knoten;
  mittlere Entfernung zw. 2 Knoten: $\Delta \approx \frac{1}{4} \sum w_i$

- *Ring* als Sonderfall d = 1 !

- *Hypercube* der Dimension d ist d-dimensionaler Torus mit $w_i = 2$ für alle Dimensionen!

$$\rightarrow \quad \Delta = \frac{1}{4} \sum_d 2 = \frac{1}{4}(2\,d) = \frac{d}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \log_2 n}}$$

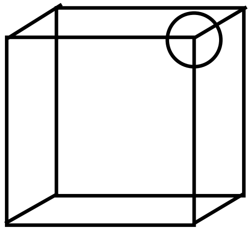
3-dimensionaler Torus



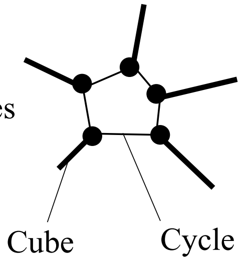
Mit $w_1 = 4$, $w_2 = 3$, $w_3 = 3$

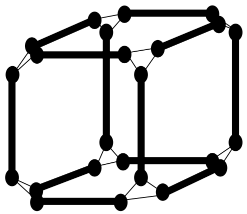
Cube Connected Cycles (CCC)

d-dimensionaler Hypercube mit aufgeschnittenen Ecken, die durch Gruppen von d ringförmig verbundenen Knoten ersetzt sind.



"Ecke" eines CCC (d=5)





Beachte: Jeder Knoten hat immer *drei* Anschlüsse!

Bei Dimension d: $n = d\, 2^d$

Maximale / mittlerer Weglänge? ← Denkübung! (nicht ganz einfach)

Anzahl der Verbindungen = 3 n / 2
(statt O(n log n) wie beim Hypercube)

Es gibt viele weitere Verbindungstopologien
(wollen wir hier aber nicht betrachten)

Zufallstopologien (mit max. Grad = 4)

Verfahren A:

1) Starte mit einem Graphen ohne Kanten.
2) Wähle zwei zufällige Knoten, die noch weniger als 4 Kanten haben, und verbinde diese.
3) Wiederhole Schritt 2 solange wie möglich.
4) Falls ein unzusammenhängender Graph entsteht, beginne von vorne.

Verfahren B ("greedy graphs"): ← Motivation: Kurze Zyklen vermeiden

2) Wähle zwei bel. Knoten *mit maximaler Entfernung* (einschliesslich ∞), die noch weniger als 4 Kanten haben, und verbinde diese.

Wie gut sind diese Zufallsgraphen bzgl. mittlerer Knotenentfernung und Routingbelastung?

Verzögerungszeiten, Routingoverhead

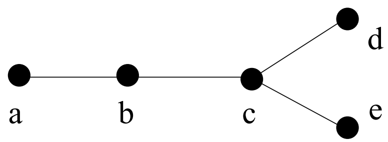
Bottleneck

Bem.: Explizites Routing nötig!

Routing-Belastung eines Knotens:
Zahl von Routen, die durch den Knoten gehen

Routing-Belastung einer Verbindung:
Zahl von Routen, die durch die Verbindung gehen

Beispiel:

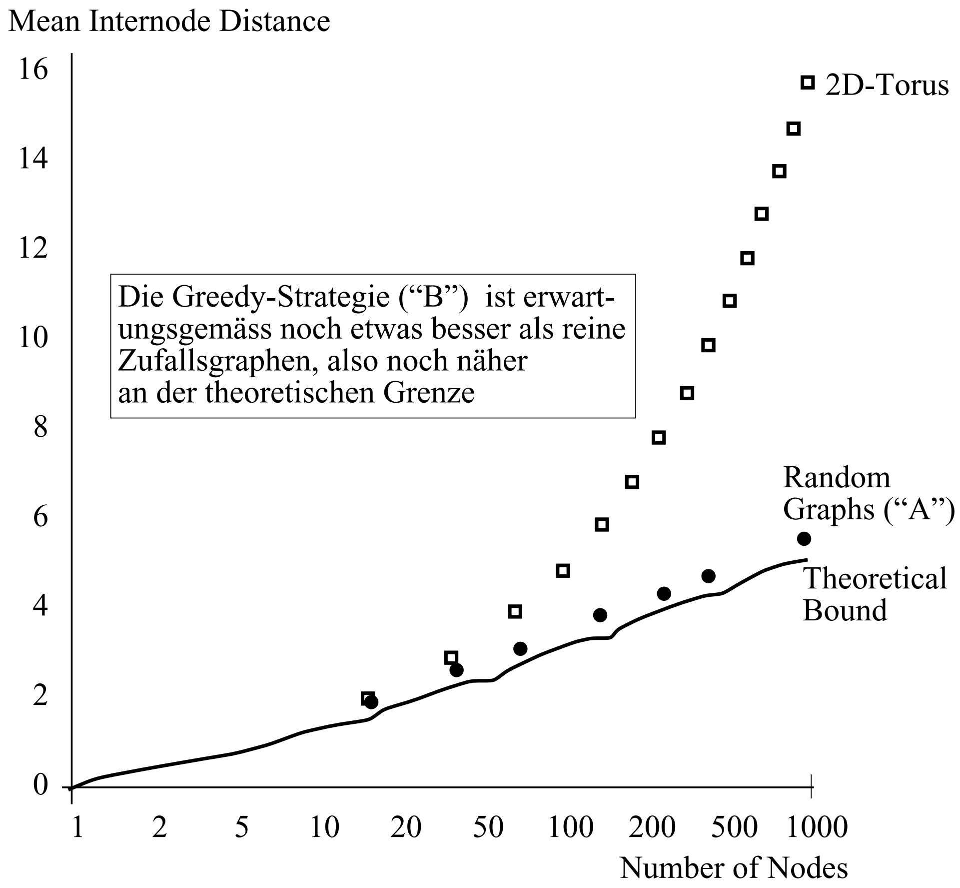


10 Routen von 20 gehen durch c

12 Routen von 20 gehen durch bc

Mittlerer Knotenabstand

- Für Knoten mit Grad 4 (D. Prior, Edinburgh)



Man lese zu den Untersuchungen zu Zufallstopologien folgenden Artikel:

D. M. N. Prior, M. G. Norman, N. J. Radcliffe, L. J. Clarke: *What Price Regularity*?, Concurrency, Practice and Experience, Vol 2 No 1, pp. 55-78, 1990 (Dort auch Ergebnisse zur Routing-Belastung)